Przykład 1

Statystyczna kontrola wytrzymałości materiału

Próba symulowana: $\nu := 0.18$ $n := 6$ $R_m := 33$ $R := R_m \cdot \mathrm{rweibull}\left(n, \frac{1}{\nu}\right)$

Badania wytrzymałości R [MPa] betonu B 30
na n=6 próbkach wylosowanych z jednorodnej partii materiału

Wyniki próby $R = \begin{pmatrix} 36.66 \\ 31.68 \\ 39.88 \\ 25.6 \\ 30.57 \\ 22.93 \end{pmatrix}$

Dane aprioryczne wg PN-B-03264/Tabl.1: $f_{ck} := 25$ $f_{cm} := f_{ck} + 8$

Wartość charakterystyczna f_{ck} - określona jako kwantyl 5%-owy,
-o prawdopodobienstwie przekroczenia Prob($R<R_k$) $p := 0.05$

Hipotetyczne rozkłady prawdopodobieństw
B = log-normalny, **D** = ekstremalny Weibulla

Metody weryfikacji i estymacji statystycznej prostej (mała próba) :
1. Momentów, **2.** Kolokacji, **3.** Wiarogodności

Program komputerowy Mathcad 11.0 lub Mathcad PLUS 6.0

$\mathrm{hnorm}(t) := \dfrac{\mathrm{dnorm}(t, 0, 1)}{\mathrm{pnorm}(t, 0, 1)}$ - funkcja ryzyka normalnego

Wartości iterowane $\boxed{\text{w ramkach}}$

Przyjęto:

- do **oszacowania bayesowskiego** przy wzięciu w rachubę danych normowych PN-B-03264

$n' := 60$ - waga statystyczna danych empirycznych $f_{ck} = 25$ $f_{cm} = 33$

$\ln R'_m := \ln(f_{cm})$ $\nu := \dfrac{\ln(f_{ck}) - \ln(f_{cm})}{\mathrm{qnorm}(0.05, 0, 1)}$ - aprioryczne parametry normalne $\ln R'_m = 3.5$ $\nu = 0.17$

$\nu' := \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \nu^2}$ -wariancja logarytmiczna ν^2 zredukowana (materiał pochodzi z jednego cyklu produkcyjnego) zgodnie z regułą równego podziału wariancji w hierarchicznym systemie

$\nu' = 0.14$

- do **oszacowania ostrożnego** R_{min} przy zastosowaniu statystyki t-niecentralne

$p = 0.05$ - wadliwość (przed kompleksową kontrolą jakości) $c := 0.90$ - ufność oszacowania R_{min}

$t_{pc} := 1.96$- gdy n"=n'+n=66 wg normy ISO 12491/Tabl.6

Metoda 1. Momentów rozkładu statystycznego - numeryczna

$\mu := \exp\left(\text{mean}\left(\overrightarrow{\ln(R)}\right)\right)$ mediana $\mu = 30.66$

Statystyki logarytmicznego rozkładu częstości

$\nu := \text{stdev}\left(\overrightarrow{\ln(R)}\right)$ logarytmiczny współczynnik zmienności $\nu = 0.19$

$$Sk(R) := \frac{\sum \overrightarrow{\left[(\ln(R) - \ln(\mu))^3\right]}}{n\cdot\nu^3}$$ logarytmiczna skosność $Sk(R) = -0.16$

Weryfikacja typu rozkladu prawdopodobienstwa

Skośność rozkładów logarytmicznie normalnych Sk=0	**B**	Sk(R)<Sk	ocena lepsza
Skośność rozkładów Weibulla Sk= -1.14	**D**	Sk(R)>>Sk	ocena gorsza

Estymacja wartości charakterystycznej

B $t := -\text{qnorm}(0.05, 0, 1)$ wskaźnik normalny $t = 1.64$

Wzory równoważne: $R_k := \mu\cdot\exp(-t\cdot\nu)$ $R_k = 22.39$ $\text{qlnorm}(0.05, \ln(\mu), \nu) = 22.39$

$Sk(R) = -0.16$

D $t_E := -\ln(-\ln(0.95))$ - wskaźnik ekstremalny kwantyla 5% $t_E = 2.97$

$R_o := \mu\cdot\exp(0.45\cdot\nu)$ - wartość centralna weibullowska $R_o = 33.42$

$\upsilon := \frac{\sqrt{6}}{\pi}\cdot\nu$ - weibullowski współczynnik zmienności $\upsilon = 0.15$

$R_k := R_o\cdot\exp(-t_E\cdot\upsilon)$ - wartość charakterystyczna $R_k = 21.47$

Metoda 2. Kolokacji dystrybuanty empirycznej i teoretycznej - graficzna

Dystrybuanta empiryczna

Kresy wyników próby $\min(R) = 22.93$ $\max(R) = 39.88$ $i := 0..5$

$$F_{R_i} := \frac{i+1}{n+1} \qquad F_R = \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.29 \\ 0.43 \\ 0.57 \\ 0.71 \\ 0.86 \end{pmatrix}$$

dystrybuanta
po uporządkowaniu

$$\mathrm{sort}(R) = \begin{pmatrix} 22.93 \\ 25.6 \\ 30.57 \\ 31.68 \\ 36.66 \\ 39.88 \end{pmatrix}$$

Weryfikacja typu rozkładu prawdopodobieństwa

B Rektyfikacja dystrybuanty empirycznej - na arkuszu B daje większe odchyłki

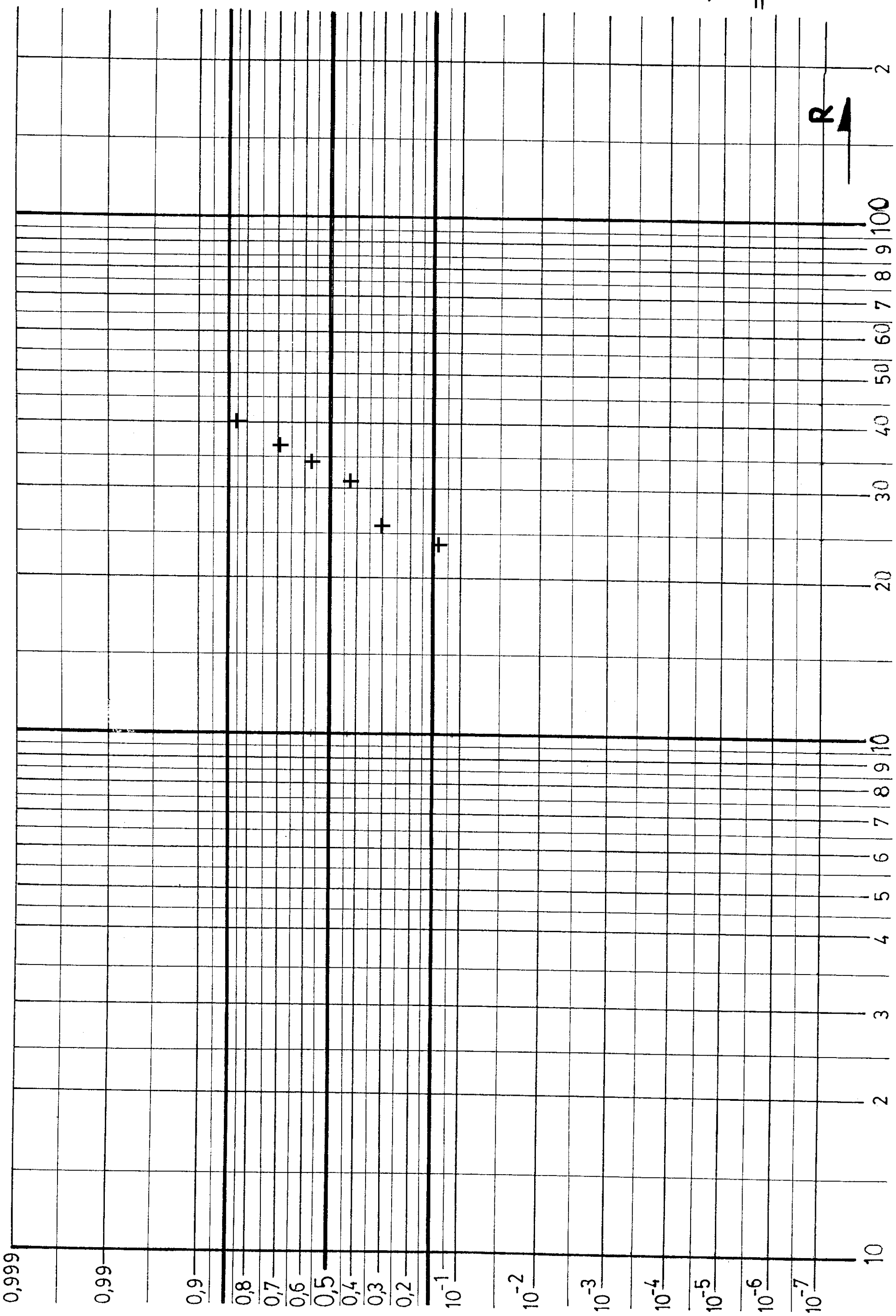
D niż weryfikacja - na arkuszu D

Estymacja parametrów rozkładu - odczytanych dla zweryfikowanej funkcji rozkładu D

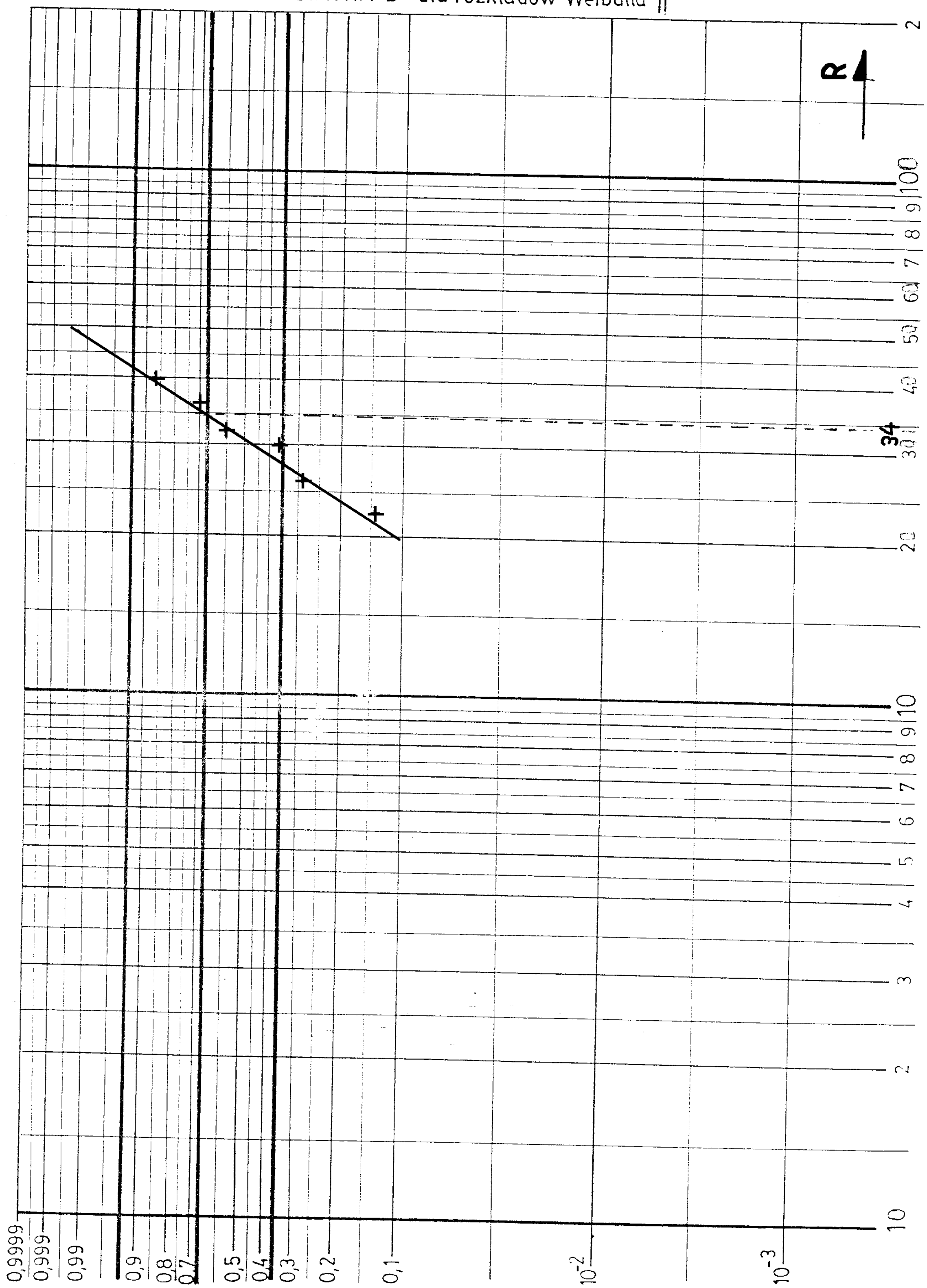
$R_u := 34$ - wartość centralna weibullowska $R_m := 28$ - wartość srednia $\nu = 0.19$

$$\upsilon := \frac{R_u - R_m}{R_m}$$ wibullowski współczynnik zmienności $\upsilon = 0.21$

SIATKA B - dla rozkładów logarytmicznie-normalnych



SIATKA D - dla rozkładów Weibulla ||



Metoda 3. Wiarogodności próby empirycznej - analityczna

Estymacja parametrów rozkładu

B $R_m := \mu \quad \nu := \nu$ — momenty logarytmiczne rozkładu są parametrami największej wiarogodności rozkładu log-normalnego — $R_m = 30.66$

$\nu = 0.19$

D $\boxed{R_o := 29.75}\ \boxed{\upsilon := 0.12}$ — parametry największej wiarogodności rozkładu Weibulla wynikają z układu równań nieliniowych

Given $\sum \overrightarrow{\left(\frac{R}{R_o}\right)^{\frac{1}{\upsilon}}} = n \qquad \sum \overrightarrow{\left[\left[\left(\frac{R}{R_o}\right)^{\frac{1}{\upsilon}} - 1\right]\cdot \ln\left[\left(\frac{R}{R_o}\right)^{\frac{1}{\upsilon}}\right]\right]} = n$

$$\boxed{\mathrm{Find}(R_o, \upsilon) = \begin{pmatrix} 33.67 \\ 0.17 \end{pmatrix}}$$

Weryfikacja typu rozkładu prawdopodobieństw

B

$f_B := \overrightarrow{\mathrm{dlnorm}(R, \ln(R_m), \nu)} \qquad \ln L_B := \sum \overrightarrow{(-\ln(f_B))}$

wiarogodność rozkładu B

$\ln L_B = 19.12$

D

$$f_D := \overrightarrow{\left[\frac{1}{\upsilon\cdot R}\cdot\left(\frac{R}{R_o}\right)^{\frac{1}{\upsilon}}\cdot \exp\left[-\left(\frac{R}{R_o}\right)^{\frac{1}{\upsilon}}\right]\right]} \qquad \ln L_D := \sum \overrightarrow{(-\ln(f_D))}$$

wiarogodność rozkładu D

$\ln L_D = 26.85$

Wniosek $\ln L_D > \ln L_B = 1$ - rozkład Weibulla jest bardziej wiarogodny

----

Wskaźniki wartości charakterystycznej — $p = 0.05 \quad \beta_B := -\mathrm{qnorm}(p, 0, 1) \quad \beta_D := -\ln(1 - p)$ — $\beta_B = 1.64$

$\beta_D = 0.05$

Kolokacja rozkładu Weibulla i log normalnego

$\ln R_k := \ln(R_o) - \beta_D\cdot\upsilon$

$\ln R_m := \ln R_k + \beta_B\cdot\nu \qquad \nu := \frac{\upsilon}{\beta_D}\cdot \mathrm{hnorm}(\beta_B)$

$\ln R_k = 3.39$

$\ln R_m = 3.8$

Parametry aposterioryczne $\ln R''_m := \frac{n'\cdot \ln R'_m + n\cdot\ln(R_m)}{n' + n}$ — $\nu = 0.25$

$\ln R''_m = 3.49$

$$\nu'' := \sqrt{\frac{(n' - 1)\cdot\nu'^2 + (n-1)\cdot\nu^2 + n'\cdot \ln R'_m{}^2 + n\cdot\ln(R_m)^2 - (n' + n)\cdot(\ln R''_m{}^2)}{n' + n - 2}}$$

$\nu'' = 0.15$

Statystyka t-niecentralne $t_{pc} = 1.96 \qquad R_{min} := \exp(\ln R''_m - t_{pc}\cdot\nu'')$ — $R_{min} = 24.35$